www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1990 — CONCOURS SCIENCES

MATHÉMATIQUES I

Options M, P, T, TA. — *Durée : 4 heures*

Dans l'appréciation des copies, il sera tenu compte de la rigueur des raisonnements, de la précision de la rédaction et de la présentation.

Le candidat pourra, à condition de l'indiquer clairement, admettre un résultat afin de traiter les questions suivantes.

La résolution du problème ne nécessite pas l'usage d'une calculatrice.

Il sera fourni une feuille de papier millimétré à chaque candidat.

RAPPEL

Si f est une application de IR dans IR, continue par morceaux et T-périodique ($T \in \mathbb{R}^*$), on appelle coefficients de Fourier exponentiels de f les complexes définis par :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, e^{-\frac{2i\pi k}{T} x}\, dx$$

Le théorème de Jordan-Dirichlet affirme que si f est continue sur IR et de classe C^1 par morceaux, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{\frac{2i\pi k}{T} x} \qquad \text{ce que l'on note : } f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k\, e^{\frac{2i\pi k}{T} x}$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des polynômes et des nombres de Bernoulli.

I

1) Montrer que les relations :

(R) $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ B_0(x) = 1. \\ \text{Pour tout nombre entier naturel } n \text{ non nul}, \quad B'_n = n B_{n-1}, \\ \text{où } B'_n \text{ désigne la fonction dérivée de la fonction } B_n. \\ \text{Pour tout nombre entier naturel } n \text{ non nul}, \quad \int_0^1 B_n(x)\, dx = 0. \end{cases}$

Définissent une unique suite (B_n) de fonctions polynômes sur IR.

Déterminer le degré et le coefficient dominant de B_n, et calculer, pour $n \geqslant 2$, $B_n(1) - B_n(0)$.

Dans toute la suite du problème, la lettre n désigne un nombre entier naturel, et on note, pour tout nombre entier n, $b_n = B_n(0)$.

2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$

Calculer $B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et, pour $n \geqslant 1$, b_{2n+1}.

3) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad B_n(x) = 2^{n-1}\left[B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$

b) $B_n\left(\frac{1}{2}\right) = b_n \cdot \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)$

Quel est le signe, pour $n \geqslant 1$, du produit $B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot b_{2n}$?

4) Calculer B_2 et B_3. Quelles sont les racines de ces polynômes?

5) *a)* Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_{2n} admet sur $[0,1]$ exactement deux racines α_n et β_n qui vérifient $0 < \alpha_n < \frac{1}{2} < \beta_n < 1$, que les seules racines de B_{2n+1} dans $[0,1]$ sont $0, \frac{1}{2}$ et 1, et que le signe de B_{2n+1} sur $]0, \frac{1}{2}[$ est celui de $(-1)^{n-1}$.

Que vaut $\alpha_n + \beta_n$?

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad B_{2n}(x) - b_{2n} = 2n \int_0^x B_{2n-1}(t)\, dt$.

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $(-1)^{n-1} b_{2n} > 0$.

6) Établir que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

(i) $\sup_{x \in [0,1]} |B_{2n}(x)| = |b_{2n}|$

(ii) $\sup_{x \in [0,1]} |B_{2n+1}(x)| = |B_{2n+1}(\alpha_n)|$

(iii) $\frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right)|b_{2n+2}| \leqslant |B_{2n+1}(\alpha_n)| \leqslant \frac{2n+1}{2}|b_{2n}|$

7) Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, b_{n-k}\, x^k$$

II

1) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{B}_n$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

- $\forall x \in [0,1[\quad \widetilde{B}_n(x) = B_n(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{B}_n(x+1) = \widetilde{B}_n(x)$

a) Représenter graphiquement la restriction de $\widetilde{B}_2$ à l'intervalle $[-1,2]$.

Montrer que $\widetilde{B}_2$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux. Est-elle de classe C^1?

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\widetilde{B}_n$ est de classe C^{n-2}.

2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$:

$$\int_0^1 B_n(x)\, e^{-2i\pi px}\, dx = -\frac{n!}{(2ip\pi)^n}$$

3) Établir que, pour tout $n \geqslant 2$ et pour tout $x \in [0,1]$: $B_n(x) = -\frac{n!}{(2i\pi)^n} \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{2i\pi px}}{p^n}$

4) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2n}}$

a) Montrer que $S_{2n} = (-1)^{n-1} b_{2n} \frac{\pi^{2n} 2^{2n-1}}{(2n)!}$

b) Calculer S_2 et S_4.

c) Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} S_{2n} = 1$.

En déduire $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[2n]{\frac{(-1)^{n-1} b_{2n}}{(2n)!}}$

III

1) Soit $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ fixé (c'est-à-dire : z est un nombre réel différent d'un nombre entier relatif) et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique définie par :

$$\forall x \in [-\pi, +\pi[\qquad f(x) = \cos(zx)$$

a) Montrer que f est paire, continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux.

Est-elle de classe C^1 ?

b) Déterminer les coefficients de Fourier de f (expression en cosinus et sinus).

En déduire :

$$\operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{n^2 - z^2} \right]$$

puis, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$y \operatorname{cotg} y = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2y^2}{n^2\pi^2 - y^2}$$

2) Soit $y \in]-\pi, +\pi[$. On note toujours, pour $n \geqslant 1$, $S_{2n} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2n}}$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{y^2}{n^2\pi^2 - y^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{y}{n\pi}\right)^{2k}$$

b) Démontrer que, pour tout nombre entier $K \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{K} S_{2k} \left(\frac{y}{\pi}\right)^{2k} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^2}{n^2\pi^2 - y^2}$$

En conclure que la série entière de terme général $S_{2k}\left(\frac{y}{\pi}\right)^{2k}$ converge, et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} S_{2k} \left(\frac{y}{\pi}\right)^{2k} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^2}{n^2\pi^2 - y^2}$$

c) Démontrer d'une manière analogue que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^2}{n^2\pi^2 - y^2} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} S_{2k} \left(\frac{y}{\pi}\right)^{2k}$$

et en conclure :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^2}{n^2\pi^2 - y^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} S_{2k} \left(\frac{y}{\pi}\right)^{2k}$$

d) Déduire des questions précédentes :

$$y \operatorname{cotg} y = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{b_{2k}}{(2k)!} (2y)^{2k}$$

A l'aide de cette égalité, retrouver les valeurs de b_2 et b_4.

IV

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$Q_n(x) = \int_0^x B_n(t)\, dt$$

a) Montrer que :

$$Q_n(x+1) - Q_n(x) = x^n$$

b) Calculer en fonction de n et de p, $p \in \mathbb{N}^*$: $Q_n(p)$.

2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

$$I_{2n} = \int_0^1 B_{2n}(t)\, e^t\, dt$$

a) Démontrer l'égalité :

$$e - 1 = \frac{1}{2}(1+e) - (e-1) \cdot \sum_{p=1}^{n} \frac{b_{2p}}{(2p)!} + \frac{I_{2n}}{(2n)!}$$

b) Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{2n}}{(2n)!} = 0$.

c) En déduire que la série numérique de terme général $\frac{b_{2p}}{(2p)!}$ converge et que $\coth \frac{1}{2} = 2 + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{b_{2p}}{(2p)!}$

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail